Les angles dans les polygones réguliers

Nous avions décrit pour la 4e classe la façon dont, à partir du mouvement circulaire, on peut progressivement obtenir le mouvement elliptique et aussi les formes du triangle et du quadrilatère régulier [1]. Claude avait lui-même fait l'expérience corporelle de ce qu'est la course sur un cercle. Nous repartons de là pour entrer maintenant plus profondément dans les lois de certaines figures – tout d'abord les polygones réguliers. D'une part la description algébrique des lois qu'on trouve dans les polygones réguliers nous fait reprendre les impulsions fondamentales du cours d'algèbre, d'autre part on voit s'ouvrir un beau domaine pour les mettre en application. C'est au professeur de voir dans quelle mesure il parcourt encore une fois avec les enfants le processus décrit pour la 4e classe, ou bien s'il se contente de l'évoquer à nouveau… Ce qui compte, c'est que les enfants soient convaincus qu'ils tournent sur eux-mêmes de 360° quand ils font un tour de cercle (en suivant leur nez). Tous les lecteurs ne connaissant pas la description qui a été faite pour la 4e classe, je me permets de l'insérer ici en la modifiant un peu. Il est utile pour la suite que cela se passe de façon aussi vivante que possible avec les élèves :

J'appelle Claude, un garçon solide, fort habile à résoudre les problèmes techniques mais moins à l'aise dans les cours artistiques et scientifiques. Je lui demande : « Tourne-toi de 360° ! » Claude tourne une fois autour de son axe. À ma demande, il exécute les rotations correspondant aux différents angles et montre ainsi qu'il maîtrise la mesure des angles.

« Fais le tour d'un cercle ! » Claude parcourt un cercle. « Est-ce que tu as tourné toi aussi ? » La réponse est « Non ! » Nous recommençons donc encore une fois, depuis le début. « Tourne encore une fois de 360° et décris ce que tu vois ! » Claude tourne, et en tournant il nomme la classe, la porte, le tableau et encore la classe. Je lui demande : « Maintenant, parcours encore un cercle ! » Claude baisse le nez et parcourt bravement son cercle à nouveau. « Est-ce que tu as tourné ? » À nouveau la réponse : « Non ! » « Eh bien alors, refais-le encore

1. Voir Ernst Schuberth, *La géométrie dans les écoles Steiner/Waldorf*, volume 2 : *Approche comparative des figures géométriques de base en 4e et 5e classe*.

une fois et raconte ce que tu vois droit devant toi ! » Claude repart et énumère : la classe, la porte, le tableau, les fenêtres et de nouveau la classe. Quand je lui redemande s'il a tourné, il répond « Oui ! » Pourtant il n'est pas encore tout à fait à l'aise avec cette affaire. La classe décrit donc comment elle le voit lors des différentes étapes. Je commence par le faire encore tourner sur lui-même. La classe voit d'abord son ventre, puis son épaule droite, son dos, son épaule gauche, et de nouveau son ventre. Puis il fait le tour d'un cercle, et la classe le voit de la même façon de plusieurs côtés successivement.

Bon gré mal gré, Claude est bien obligé de se convaincre petit à petit qu'il a tourné en parcourant le cercle. Mais comme sa tendance plutôt flegmatique le porte à s'identifier fortement au vécu corporel, je trouve un autre moyen pour emporter sa conviction encore hésitante : « Quelle est la différence entre tourner et marcher tout droit ? (J'aborde ainsi les deux notions polaires de la géométrie projective : *tourner et avancer en ligne droite* [2]). Après avoir fait un essai, Claude me dit : « En tournant on attrape le vertige, pas en marchant tout droit. » En parcourant un cercle, on devrait donc aussi avoir le vertige. Claude fait un essai. C'est juste, on attrape le vertige en parcourant un cercle, donc on tourne ! Une fois entré dans le ressenti corporel, la conviction s'imprime peu à peu : il y a du vrai là dedans.

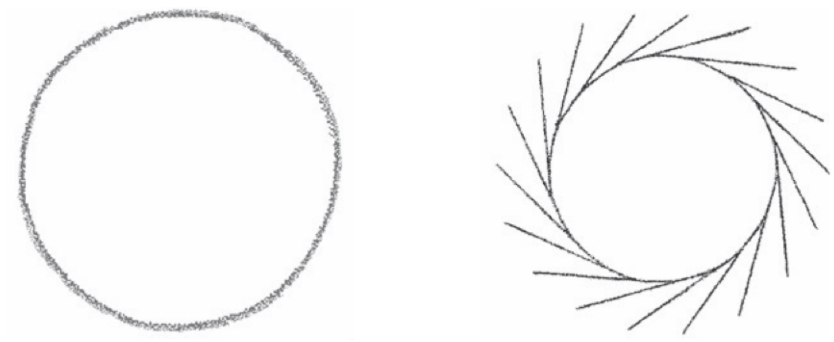

fig. 1 et 2 : tourner et avancer sur un parcours circulaire, 1

Maintenant, je commence par dessiner au tableau le parcours circulaire (fig. 1) ; puis j'inscris sur cette image les changements de direction du regard de Claude (fig. 2). Pour finir, Claude fait encore son parcours, et un autre élève suit à l'aide d'un bâton qu'il pose sur le dessin (faisant office de tangente) la direction qui change sans cesse en chaque point (fig. 3).

2. Ibid.

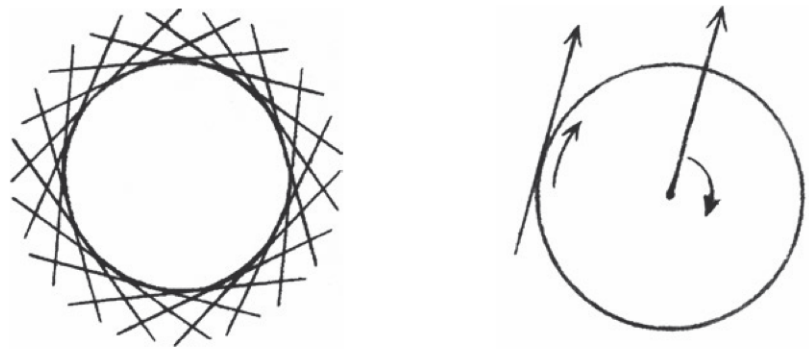

fig. 3 et 4 : tourner et avancer sur un parcours circulaire, 2

Nous arrivons donc au résultat suivant : en parcourant une fois un cercle (en suivant son nez), on tourne exactement de 360°.

Claude va s'asseoir, un peu épuisé et content d'avoir accompli son pensum.

On peut aussi réaliser le mouvement à partir du centre d'un cercle. Pour cela, nous plaçons un enfant au centre, il regarde toujours dans la *même direction* que l'enfant qui fait le tour – et donc *pas* en direction de l'enfant (fig. 4).

Après avoir réveillé les expériences de la rotation et de la marche sur un cercle – ou les avoir découvertes si on ne les avait pas encore faites – nous poursuivons.

Que se passe-t-il quand nous parcourons un ovale, par exemple une ellipse, au lieu d'un cercle [3] ? Catherine vient en faire la démonstration devant la classe. Plus l'ovale est allongé, plus devient manifeste l'alternance rythmique du mouvement entre la tendance majoritaire à avancer et la tendance à tourner. Selon la courbure, c'est soit l'avancement (dans les endroits presque droits), soit la rotation (dans les endroits très incurvés) qui domine. Au total, pourtant, au bout d'un tour, on fait une rotation de 360°, comme pour le cercle (fig. 5).

Jeanne parcourt maintenant un « ovale triangulaire » à la demande du professeur. À chaque tour maintenant, un changement de rythme se produit trois fois entre la rotation qui s'accentue et l'avancée qui prédomine. L'angle de rotation total reste toutefois de 360°.

3. Ceci avait également été proposé dans le volume 2 pour une première approche ; en tout cas il est nécessaire d'y revenir.

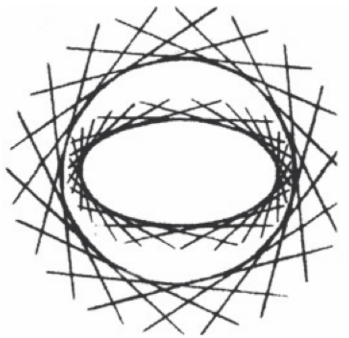

fig. 5 : du cercle à l'ellipse

fig. 6 : du cercle au triangle

Nous faisons maintenant en sorte que le changement soit de plus en plus brutal jusqu'à ce que la rotation et l'avancée en ligne droite se fassent de façon complètement séparée. Nous sommes arrivés au triangle équilatéral : sur les côtés, on ne fait qu'avancer, sur les sommets on ne fait que tourner. Les deux mouvements de base se « séparent » dans cette figure (fig. 6, triangle intérieur). L'angle de rotation reste toutefois de 360° pour un parcourt complet.

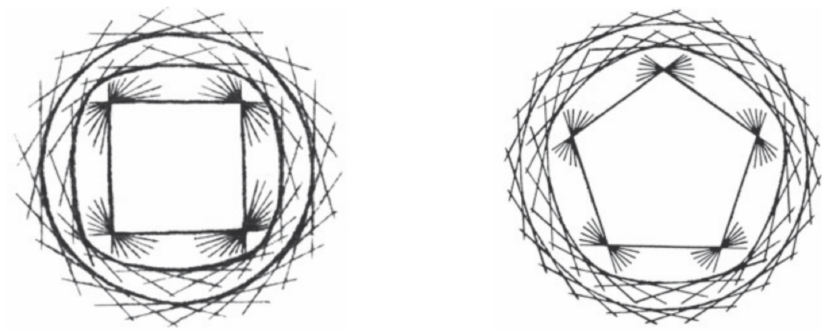

fig. 7 et 8 : les angles de rotation quand on fait le tour d'un carré ou d'un pentagone régulier

Avant de poursuivre l'étude des angles dans le triangle, nous élargissons encore un peu le questionnement. Nous commençons par nous convaincre qu'on peut avoir le même processus avec le carré, le pentagone et l'hexagone réguliers, etc. On fait toujours une rotation de 360° en tout, qui se répartit simplement sur des points de plus en plus nombreux (les angles). La rotation

diminue ainsi de plus en plus à chaque fois : plus les sommets sont nombreux, moins on tourne en passant sur chacun.

De même que le nombre des sommets importe peu dans l'angle de rotation total quand on fait le tour d'un *polygone* – c'est le moment d'introduire le terme –, de même il ne faut pas se borner trop étroitement à une forme régulière. Pour toute courbe fermée qu'on « contourne de façon identique », la rotation totale est de 360°. La nouveauté n'apparaît que si l'on fait des « incurvations ». Sans conceptualiser de façon précise, on distingue d'une part les formes convexes (qu'elles soient courbes ou polygonales), et d'autre part celles qui ne le sont pas. Quelqu'un lance l'idée qu'on tourne aussi à 360° autour de la « forme en haricot » car la direction à l'arrivée est la même que celle du départ. On a cependant tourné dans l'autre direction entre A et B (fig. 9).

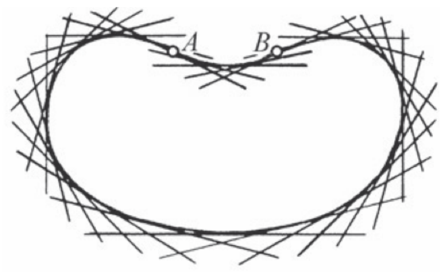

fig. 9 : Tourner autour de la forme en haricot

Pendant qu'un enfant fait lentement le tour de la forme et que la classe observe les différentes directions du mouvement de rotation, on trouve les *points d'inflexion*. Ces observations ne constituent cependant qu'une petite parenthèse, et nous pouvons ainsi revenir sans tarder à notre sujet principal.

En faisant donc le tour d'un triangle équilatéral, nous tournons à 360°. Traçons une fois encore la figure en inscrivant les angles de rotation. Claude revient devant la classe, il prend un bâton sous son bras pour marquer la direction de son nez, et il montre à toute la classe les endroits où il tourne, et autour de quel angle. On appelle ces angles les *angles extérieurs* du triangle. On nomme également les *angles intérieurs* et on les montre sur le dessin (fig. 10).

Nous pouvons maintenant réfléchir sur les valeurs de chacun des angles et les inscrire sur la figure : la rotation à 360° se répartit de façon égale sur les trois sommets : on tourne donc de 360° : 3 = 120°. C'est la mesure d'un

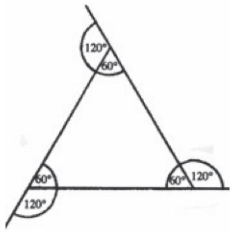

fig. 10 : les angles extérieurs et intérieurs d'un triangle équilatéral

angle extérieur. Chaque angle intérieur est le complémentaire à 180° de son angle extérieur. Sa mesure est donc de 60°, et tous les angles intérieurs du triangle forment en totalité 180°. Nous notons en résumé et en utilisant des abréviations :

Somme des angles extérieurs : $S_e = 360°$
Mesure d'un angle extérieur : $A_e = 360 : 3 = 120°$
Mesure d'un angle intérieur : $A_i = 180° - 120° = 60°$
Somme des angles intérieurs : $S_i = 3 \times 60° = 180°$

fig. 11 et 12 : les angles extérieurs et intéreurs du carré et du pentagone régulier

Regardons encore une fois les angles sur le carré et le pentagone régulier. Les 360° se répartissent en 4 ou 5 parts égales. Cela donne 360° : 4 = 90° pour un angle extérieur du carré et 360° : 5 = 72° pour le pentagone régulier. Les élèves font le calcul pour l'un des cas, seuls ou en petits groupes, comme nous l'avons fait pour le triangle.

Pour le carré, la somme des angles extérieurs et intérieurs est la même (360° à chaque fois) ; pour le pentagone la somme des angles intérieurs commence à dépasser les 360° de la somme des angles extérieurs : 5 × 108° = 540°.

Nous inscrivons encore les résultats dans un tableau. Nous indiquons le nombre des sommets par *n* :

	Nombre des sommets n	Somme des angles extérieurs S_e	Mesure d'un angle extérieur A_e	Mesure d'un angle intérieur A_i	Somme des angles intérieurs S_i
Triangle	3	360°	120°	60°	180°
Carré	4	360°	90°	90°	360°
Pentagone	5	360°	72°	108°	540°

Devoir à la maison : Calculer les angles et la somme des angles d'un hexagone et d'un décagone réguliers. On peut compléter le tableau si l'on veut.

Nous reportons dans le cahier l'essentiel de ce que nous avons fait, ce qui permet de le repasser en revue. Puis j'anticipe brièvement sur le lendemain. La phase finale est l'histoire que je raconte, elle décrit des scènes historiques des temps modernes conformément au plan de la 6e classe.

Remarque : On connaît l'importance de la structure et du rythme du cours principal qui dure de 90 à 120 minutes selon les écoles. Il en va tout autant pour la structure et le rythme d'un jour sur l'autre. Le premier jour où l'on propose un contenu nouveau, on peut veiller à mettre au premier plan l'expérience individuelle concrète, et on en résumera encore une fois les éléments essentiels en fin de séance. Après le sommeil, notre psychisme est en relation différente avec les expériences de la veille. Les savoirs étudiés continuent à travailler dans les forces inconscientes de l'âme ; cela permet d'être le lendemain matin disposé autrement pour l'apprentissage. Le professeur aborde donc davantage la matière par la pensée, à l'aide de concepts. On trouvera des développements sur ce sujet dans l'étude de la nature humaine selon l'anthroposophie[4].

Le cours ne commence donc pas le lendemain par la question souvent rituelle : « Sur quoi avons-nous travaillé hier ? » mais à peu près comme suit : « Hier nous avons évoqué les angles et la somme des angles dans les triangles équilatéraux, les carrés et les pentagones réguliers. La marche des calculs était assez semblable dans tous les cas. À la maison vous avez étudié d'autres figures

4. Voir Rudolf Steiner, *Pédagogie et connaissance de l'homme*, GA 302, 3e conférence du 14 juin 1921, Éditions anthroposophiques romandes.

de la même façon. Qui parmi vous peut décrire lui-même le processus de calcul, la loi à appliquer pour chaque polygone régulier ? »

Le premier à lever la main, c'est Marc, un enfant sanguin souvent parmi les premiers à vouloir prendre part aux questions. « Quand nous avons un triangle, par exemple . . . » Je l'interromps déjà : « Tu sais, nous avons parlé hier du triangle. Mais maintenant, nous cherchons le processus de calcul lui-même, tel qu'il vaut pour tous les polygones réguliers. Qui peut le décrire ? » Marc n'est pas très content car il sait comment ça marche mais n'a pas su intervenir. Comme il n'arrive pas à décrire le processus de calcul sans prendre d'exemple, j'interroge Thomas qui avait lui aussi levé le doigt. « Disons que nous avons un carré… ». « Thomas, hier nous avons aussi parlé du carré. Peux-tu sans prendre d'exemple décrire la loi qui est identique dans tous les processus de calcul ? »

Il y a maintenant une certaine surprise dans la classe. Cette question est encore très inhabituelle. Le professeur attend visiblement quelque chose de tout nouveau. « Mais qu'est-ce qu'il veut qu'on lui dise ? » La question n'est pas formulée mais elle est perceptible. Gabrielle finit par lever le doigt. Elle est plus âgée que la moyenne de la classe. Le calcul n'est pas son fort, en revanche elle s'intéresse au contenu du cours d'allemand et surtout à l'histoire racontée en fin de cours. À la maison, la vie est difficile et elle doit participer aux tâches ménagères plus que la plupart des enfants de son âge. Elle tente d'expliquer le processus de calcul : « En tournant autour d'un polygone, nous faisons un tour de 360°. On trouve la grandeur d'un angle sur un sommet quand on divise 360° par le nombre des sommets. Un angle intérieur est le complémentaire à 180° de l'angle extérieur sur ce sommet. Si on multiplie cet angle interne par le nombre des sommets, on a tous les angles (intérieurs) à la fois. »

Stupeur dans la classe. . . Ça marche : On peut décrire le mode de calcul sans prendre d'exemple. Nous rediscutons de tout cela, puis essayons de le formuler par écrit. Cela donne, une fois que j'ai introduit les abréviations :

Somme de tous les angles extérieurs :	$S_e = 360°$
Mesure d'un angle extérieur :	$A_e = 360° : n$
Mesure d'un angle intérieur :	$A_i = 180° - A_e = 180° - 360° : n$
Somme des angles intérieurs :	$S_i = n \times A_i = n \times (180° - 360° : n)$

Si l'on est suffisamment avancé en algèbre, on peut commencer par simplifier la parenthèse. Cela donne :

$S_i = n \times 180° - 360°$

On peut ensuite mettre 180° en facteur, car 360° = 2 × 180°. On obtient :

$S_i = (n - 2) \times 180°$.

C'est là une loi étonnamment simple et élégante. La formule dit ceci : *On calcule la somme des angles intérieurs d'un polygone régulier en retranchant 2 au nombre des sommets et en multipliant le résultat par 180°.* Nous commençons tout de suite la vérification sur les premiers exemples :

Triangle : $n = 3$

Mesure d'un angle extérieur :	$A_e = 360 : 3 = 120°$
Mesure d'un angle intérieur :	$A_i = 180° - 120° = 60°$
Somme des angles intérieurs :	$S_i = 3 \times 60° = 180°$

Le mode de calcul se résume comme suit :

$S_i = 3 \times (180° - 120°) = 3 \times 60° = 180°$.

En appliquant la formule que nous avons trouvée en dernier, nous obtenons par un chemin plus court :

$S_i = (3 - 2) \times 180° = 1 \times 180° = 180°$.

Nous pouvons également vérifier la formule pour le carré et le pentagone régulier :

$S_i = (4 - 2) \times 180° = 2 \times 180° = 360°$ et $S_i = (5 - 2) \times 180° = 540°$.

On peut déjà indiquer que la somme des angles dans le triangle équilatéral est égale à 180° et que dans un polygone régulier on ajoute à la somme cette même mesure pour chaque sommet supplémentaire. Nous reviendrons plus tard là-dessus.

Maintenant on peut aussi contrôler rapidement les devoirs à la maison en remplissant le tableau jusqu'à $n = 10$ en utilisant la formule. La classe travaille en groupes sur différents cas. Le nouveau devoir à la maison consiste à calculer les cas $n = 12$, $n = 36$ et $n = 100$.

Après le travail sur le cahier de période, la partie narrative et quelques mots sur le lendemain, c'est la fin du cours principal. Demain nous examinerons de nouveau la façon dont se construit la formule. Quand le nombre des sommets augmente, comment s'exprime dans la formule la diminution des angles extérieurs et la croissance des angles intérieurs, etc. ?